



TITLE:

# Phase Separation in Rotating Helium

AUTHOR(S):

大見, 哲巨; 碓井, 恒丸; 恒藤, 敏彦

---

CITATION:

大見, 哲巨 ...[et al]. Phase Separation in Rotating Helium. 物性研究  
1968, 11(1): 41-48

ISSUE DATE:

1968-10-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/86777>

RIGHT:

# Phase Separation in Rotating Helium

名大理 大 見 哲 巨

〃 碓 井 恒 丸

京大理 恒 藤 敏 彦

(9月25日受理)

1. 充分低温  $T$  の  $H_e^4-H_e^3$  混合液をちょうど一本の渦糸をつくる角速度で回転している Bucket に入れる。壁面での圧力を  $P$  とする。この圧力, 温度で分離すべき超流動相の  $H_e^3$  分子濃度  $X_0(T, P)$  よりも小さな濃度  $X_b$  が壁面近傍で与えられたとする。このとき  $H_e^3$  の化学ポテンシャルは

$$\mu_3(P, X_b) < \mu_3(P, X_0)$$

の関係にある。分離すべき常流動相は近似的に純  $H_e^3$  液体であるので, その化学ポテンシャルを  $\mu_3(P)$  と書けば

$$\mu_3(P) = \mu_3(P, X_0)$$

渦糸まわりの圧力  $P'$  は芯に近づく急速に低下する。それとともに  $\mu_3(P')$  も減少し, 遂に  $\mu_3(P, X_0)$  と等しくなる。したがってそれから内側は常流動相純  $H_e^3$  が分離して存在することになる。この事情を以下で定量的に議論してみる。

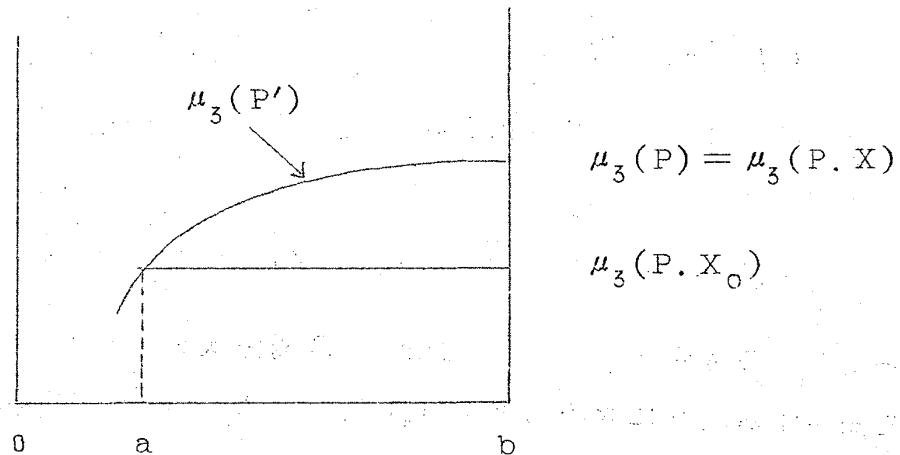


図 1.

2. 温度  $T$  は充分低いとして、常流体は  $H_e^3$  だけであるとすれば、超流動相単位体積あたりのヘルムホルツ自由エネルギーは、

$$F' = n_4' \left[ \mu_4(P', X', v_n - v_s) + \frac{m_4}{2} \right. \\ \left. + n_3' \left[ \mu_3(P', X', v_n - v_s) + \frac{m_3}{2} v_s^2 + m_3^* v_n \cdot (v_n - v_s) \right] \right] - P'$$

で与えられる。 $m_3^*$  は不純物  $H_e^3$  の有効質量である。

常流動相においては単に

$$F'' = n_4'' \left[ \mu_4(P'', X'') + \frac{m_4}{2} v_n^2 \right. \\ \left. + n_3'' \left[ \mu_3(P'', X'') + \frac{m_3}{2} v_n^2 \right] \right] - P''$$

で与えられる。これらを一挙に

$$F = n_4 \tilde{\mu}_4 + n_3 \tilde{\mu}_3 - P$$

と書けば、角速度  $\omega$  の rotating bucket 中での熱平衡は

$$\bar{F} - \bar{L}\omega - \bar{\mu}_4 \bar{N}_4 - \bar{\mu}_3 \bar{N}_3$$

の極小できる。ただし、 $\bar{F}$  は全自由エネルギー、 $\bar{L}$  は回転軸まわりの全角運動量

$$\left( \int d^3r \left[ m_3^* (\vec{v}_n - \vec{v}_s) + (m_3 n_3 + m_4 n_4) \cdot \vec{v}_s \right] \times \vec{r} \right)$$

$\bar{N}_4$ ,  $\bar{N}_3$  はそれぞれの全粒子数、 $\bar{\mu}_4$ ,  $\bar{\mu}_3$  は Lagrange multiplier である。

$$\mu_3(P, X, v_n - v_s) = \mu_3(P, X, 0) - \frac{1}{2} m_3^* (v_n - v_s)^2$$

および上の関係と Gibbs - Duhem の関係式を  $(v_n - v_s)^2$  までの order で満足するようにきめると、 $\mu_4(P, X, v_n - v_s) = \mu_4(P, X, 0)$ 。

極小の条件は、

$$\bar{\mu}_4 = \mu_4(P'', X'') - \frac{m_4}{2} (r\omega)^2$$

$$= \mu_4(P', X', 0) + \frac{m_4}{2} \left(r\omega - \frac{\kappa}{2\pi r}\right)^2 - \frac{m_4}{2} (r\omega)^2$$

$$\bar{\mu}_3 = \mu_3(P'', X'') - \frac{m_3}{2} (r\omega)^2$$

$$= \mu_3(P', X', 0) - \frac{1}{2} (m_3^* - m_3) \left(r\omega - \frac{k}{2\pi r}\right)^2 - \frac{m_3}{2} (r\omega)^2$$

となる。ただし、 $v_s$  は渦糸量子を形成することから  $v_s = \kappa/2\pi r$ ,  $\kappa = h/m_4$  および  $v_n = r\omega$ , 又、渦糸一本の鎖分の半径  $b$  :

$$2\omega\pi b^2 = k = h/m_4 \quad \therefore b^2 = h/m_4 \omega$$

を用い、 $r=b$  で  $P' = P$ ,  $X' = Xb$  とする。超流動相における圧力変化は、 $X'$  及び partial volume  $v_3, v_4$  の変化を無視すると

$$P'(r) = P - \frac{\hbar\omega}{2v} \left\{ (1-X') \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right] - X' \left[ \frac{m_3^* - m_3}{m_4} \left(\frac{r}{b} - \frac{b}{r}\right)^2 + \frac{m_3}{m_4} \left(\left(\frac{r}{b}\right)^2 - 1\right) \right] \right\}$$

$$v \equiv X' v_3 + (1-X') v_4$$

で与えられる。

更に以下の計算では簡単のため  $X' \rightarrow 0$  と近似してしまう：

$$P'(r) = P - \frac{\hbar\omega}{2v_4} \left[ \left(\frac{b}{r}\right)^2 - 1 \right]$$

$X'$  を考慮すれば、カッコにかかる係数はもっと大きくなる。

phase separation の boundary を  $r=a$  と書けば、そこで、

$P'' = P'$  したがって

$$\mu_3(P'(a), X'') - \frac{m_3}{2} (a\omega)^2 = \bar{\mu}_3$$

$$= \mu_3(P, X_b) - \frac{1}{2} \hbar\omega \frac{m_3}{m_4}$$

大見哲巨・碓井恒丸・恒藤敏彦

ただし、最後の項は  $r=b$  の値で  $\bar{\mu}_3$  を表現した。

これに

$$\mu_3(P'(a), X'') \simeq \mu_3(P, X'') + v_3(P'(a) - P)$$

および

$$\mu_3(P, X'') = \mu_3(P, X)$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} \Delta \mu_3 \equiv \mu_3(P, X) - \mu_3(P, X_b) &= \frac{\hbar\omega}{2} \left\{ \frac{v_3}{v_4} \left[ \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_3}{m_4} \left[ \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

を得る。この解は、

$$|\Delta \mu_3| \ll \hbar\omega/2 \text{ のとき}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \simeq 1 - \frac{1}{\frac{v_3}{v_4} - \frac{m_3}{m_4}} \cdot \frac{\Delta \mu_3}{\hbar\omega/2} \dots\dots,$$

$$|\Delta \mu_3| \gg \hbar\omega/2 \text{ のとき}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \simeq \frac{v_3}{v_4} \cdot \frac{\hbar\omega/2}{\Delta \mu_3}$$

で与えられる。しかし、通常  $\omega \simeq |\sec^{-1}|$  であるから第2の表式が全体にわたって成立するとしてよい。又、 $b^2 = \hbar/m_4\omega$  であるからこの場合  $a$  の  $\omega$  依存はない。

3. 上で得られた  $a$  を  $T=0$ ,  $|\Delta \mu_3| \gg \hbar\omega/2$  の場合に  $X_0$  の関数として数値計算する。ただし  $\Delta \mu_3$  として  $B, B, P^{(1)}$  の表式を用いる。  
( $X'' \simeq 1$  と近似する。)

$$\Delta \mu_3 = \mu_F(X_b) + E_0 + L_3 - n_4 |V_0| X_b [1 - P(\zeta)]$$

$$P(\zeta) = \frac{24}{\zeta^3} \sin \zeta + \left( \frac{36}{\zeta^4} - \frac{6}{\zeta^2} \right) \cos \zeta - \frac{36}{\zeta^4}$$

$$\zeta = 5.47 X_b^{\frac{1}{3}}$$

$\mu_F$  :  $m_3^*$  を用いた時の  $T=0$  での Free Fermi gas の Fermi energy

$E_0$  : 液体  $H_e^4$  中での  $H_e^3$  の binding energy

$L_0$  : 液体  $H_e^3$  中での  $H_e^3$  の binding energy

$V_0$  : 液体  $H_e^4$  中での  $H_e^3$  とうしの有効相互作用エネルギー

( $m_4 V_0 = -0.0754 m_4 S_4^2 S_4$  : 液体  $H_e^4$  の音速)

$\frac{a}{b} \ll 1$  であるので  $X_0$  として Bucket を回転する前の一様に分布した時の濃度をつかっていい。結果を図 2 に示しておく。

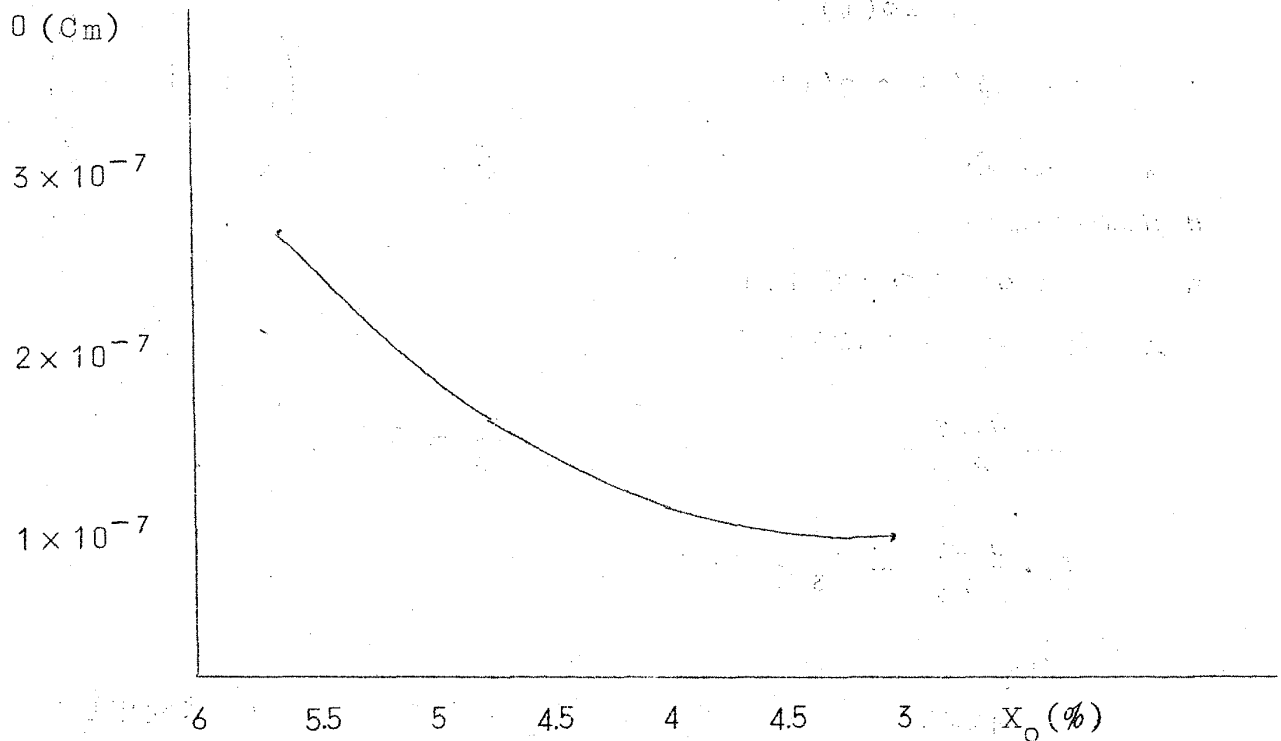


図 2.

4. 上のようにして求まった二相の境界面に生じる振動の可能性について考える。

超流動相における  $H_e^4$  流体の運動方程式は、速度ポテンシャル  $\phi$  を用いて、

$$m_4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu_4(P', X', 0) + \frac{m_4}{2} \left( \frac{\kappa}{2\pi r} \right)^2 - \frac{m_4 \kappa \omega}{2\pi} = 0$$

又，常流動相． $H_e^3$  流体においては，

$$m_3 \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} + \mu_3(P'', X'') - \frac{m_3}{2} (r\omega)^2 = 0$$

が成立する。

座標系は，渦糸の方向を  $z$  軸とした円筒座標を用いる。

$\phi$ ,  $\phi'$  について一様回転  $\phi_0$ ,  $\phi'_0$  と振動による小さな変動を分離して，

$$\phi = \phi_0 + \Delta\phi(t),$$

$$\phi' = \phi'_0 + \Delta\phi'(t)$$

と書く。又，境界面の変位を  $\xi$ ，振動によって  $\theta$  方向への流れが起らないとして，運動方程式を  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\phi'$  について linearize する。

境界面  $r = a + \xi$  においては

$$m_4 \cdot \frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} + v_4 P' - m_4 \left( \frac{\hbar}{m_4} \right)^2 \cdot \frac{\xi}{a^3} = 0$$

$$m_3 \cdot \frac{\partial \Delta\phi'}{\partial t} + v_3 P'' = 0$$

が成立する。

ただし，簡単にするために  $X' = 0$   $X'' = 1$  および  $v_3$ ,  $v_4$  は変化しないと考える。

又，流体は縮まないものと考えているので，連続方程式から，

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \Delta\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Delta\phi = 0$$

これより，

$$\Delta\phi = A k_0(kr) \cos(kz - \omega t)$$

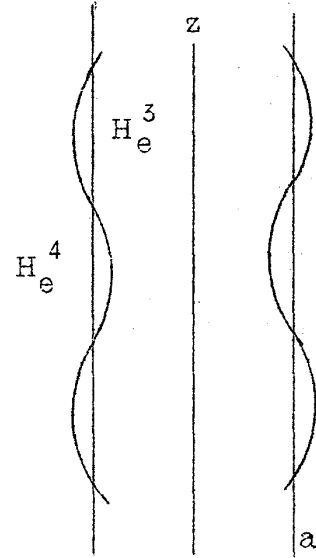


図 3.

$$\Delta\phi' = B I_0(kr) \cos(kz - \omega t)$$

が得られる。 $K_0(x)$ ,  $I_0(x)$  は modified Bessel Function である。

境界面においては、両相の圧力 ( $P' = P''$ ) 垂直方向の流速が等しいこと及び  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a}$  を用いれば、分散関係は、

$$\omega^2 = \frac{m_4 n_4 \left(\frac{\hbar}{m_4}\right)^2 \frac{k}{a^3}}{m_3 n_3 \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} + m_4 n_4 \frac{K_0(ka)}{K_1(ka)}}$$

ときめられる。 $ka \ll 1$  においては、

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\rho_4}{2\rho_3}} \cdot \frac{\hbar}{m_4 a}$$

$a \sim 10^{-7}$  cm であれば、上の音速は 10m/sec 程度である。以上 "magnetic quantum number" が零のものを例示したが、軸対称から歪む変形波もあり得る。

5. 以上の議論は渦糸が一本だけしか存在しない場合であるが、渦糸が密度  $\frac{2\omega}{\kappa}$  で存在している一般の場合にも適用できる。その時、渦糸の格子は円筒容器に対して静止している。その格子点 (渦糸の芯の部分) に密度のちがった  $H_e^3$  の相が存在するため、第 1 音波の diffraction を観測することにより、渦糸の分布がきめられる可能性がある。

$H_e^3$  流体と超流体の平面境界に音波が垂直に入射する場合の反射係数

$$\left( \frac{\rho_4 S_4 - \rho_3 S_3}{\rho_4 S_4 + \rho_3 S_3} \right)^2$$

( $S$  は音速) は 0.16 程度であるが、我々の場合の散乱については計算中である。 $H_e^3$  相の半径  $a$  は適当に大きくしなければならないようである。

従来渦糸の観測は間接的であって meniscus の形、第 2 音波の吸収、イ



大見哲巨・碓井恒丸・恒藤敏彦

オンの易動度等すべて統計的な結果を見ている。しかし、上述のように  $\text{H}_e^3$  で“杭を打込んで”やれば、もっと直接的な観測ができることになる、音波の diffraction は、その一例である。

## 文 献

- (1) J. Bardeen, G. Baym, and D. Pines : Phys. Rev. 156 207 (1967).